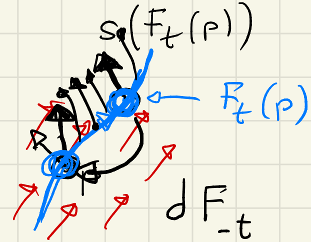
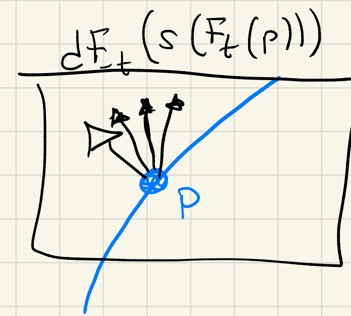
Lezione 8

DERIVATA DI LIE

$$X \in \mathfrak{X}(M) \text{ induce } \mathcal{L}_X : \Gamma \mathcal{T}^k_h M \longrightarrow \Gamma \mathcal{T}^k_h M$$
$$s \longmapsto \mathcal{L}_X(s)$$

Sia F_t flusso di X





$$\mathcal{L}_X(s)(p) \in T^k_h(TM)$$

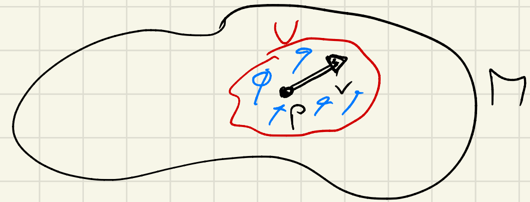
$$\mathcal{L}_X(s)(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} dF_{-t}(s(F_t(p)))$$

Ex: 1) $\mathcal{L}_X$ è lineare   2) $\mathcal{L}_X f = Xf \quad \forall f \in C^\infty(M)$

3) $\mathcal{L}_X(Y) = [X,Y]$ 4) $\mathcal{L}_X(S \otimes T) = \mathcal{L}_X(S) \otimes T + S \otimes \mathcal{L}_X(T)$

5) $\mathcal{L}_X$ commuta con le contrazioni $\quad C : \Gamma \mathcal{T}^k_h(M) \to \Gamma \mathcal{T}^{k-1}_{h-1}(M)$

Oss: Non sappiamo derivare sezioni lungo singoli vettori tangenti



$f : U \to \mathbb{R}$

$v(f) \in \mathbb{R}$

$X \in \mathfrak{X}(U) = \Gamma(TU)$

$v(X)$ non esiste

GRUPPI DI LIE

$G \qquad M(n) \supseteq GL(n,\mathbb{R}) \supseteq SL(n,\mathbb{R}) \supseteq SO(n)$

$\qquad + \qquad\qquad \times \qquad GL(n,\mathbb{R}) \supseteq O(n) \supseteq SO(n)$

$e = I_n \qquad T_e : \quad M(n) = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \qquad \{tr A = 0\} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \qquad \{\text{antisimm.}\} = \mathfrak{o}(n) \qquad \{\text{antisimm.}\} \quad \mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n)$

$\mathfrak{g}$ gotica

è algebra di Lie

$\mathfrak{g}$

Def: Un OMOMORFISMO di gruppi di Lie è un omomorfismo liscio di gruppi $f: G \to H$ ($\Rightarrow$ ISOMORFISMO)

Def: Un SOTTOGRUPPO DI LIE di gr. di Lie G è l'immagine di un omom. $f: H \hookrightarrow G$ immersione iniettiva

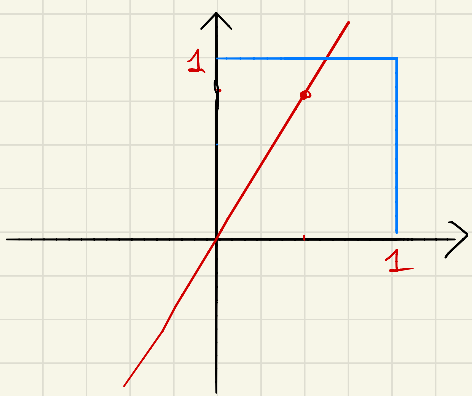
Oss: Non chiediamo embedding. (non è nec. sottovarietà)

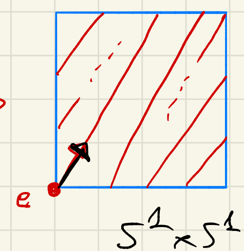
$$(x, y) \longmapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\pi} S^1 \times S^1$$

$$t \longmapsto (t, \lambda t)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ → $\lambda \in \mathbb{Q}$, → $\lambda \notin \mathbb{Q}$





Se $\lambda \in \mathbb{Q}$ si chiude

→ $\lambda \notin \mathbb{Q}$ non si chiude

$f = \pi \circ g$ è omomorfismo di gruppi di Lie

Se $\lambda \notin \mathbb{Q}$, f è immersione iniettiva $\Rightarrow$ $H = \operatorname{Im} f < G$ sgr di Lie
è denso in G $\quad \underline{H \cong \mathbb{R}}$

In realtà anche se $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\operatorname{Im} f = H < G$ è sgr di Lie: in questo caso è anche embedded.

In questo caso $\underline{H \cong S^1}$

Def: G Lie $\quad g \in G \quad L_g : G \to G$, $h \mapsto g \cdot h \quad R_g : G \to G$, $h \mapsto h \cdot g \quad$ è diffeo (no omom.)

$C_g : h \mapsto g^{-1} h g$, $\quad G \to G$ $\quad C_g = L_{g^{-1}} \circ R_g = R_g \circ L_{g^{-1}}$

isomorfismo di gr Lie

Def: G° = c. connessa di $e \in G$

Prop: $G^\circ \triangleleft G$ $\qquad$ **Es**: $O(n)^\circ = SO(n)$

dim: $\underline{g \in G^\circ}$ $\quad L_g : G \to G$ permuta le c.c.

$e \mapsto g$ $\qquad \Rightarrow L_g(G^\circ) \subseteq G^\circ$

$G^\circ \to G^\circ$

$\Rightarrow G^\circ$ chiuso per moltiplicaz.

$i : G \to G$ permuta c.c. $\quad e \mapsto e \quad \Rightarrow i(G^\circ) = G^\circ$
$g \mapsto g^{-1}$

$\Rightarrow G^\circ$ chiuso per inverso

$h \in G \qquad C_h : G \to G \qquad \Rightarrow C_h(G^\circ) = G^\circ \qquad \square$
$e \mapsto e$

Si può fare $G/G^\circ = \{$c.c. di $G\}$ gruppo

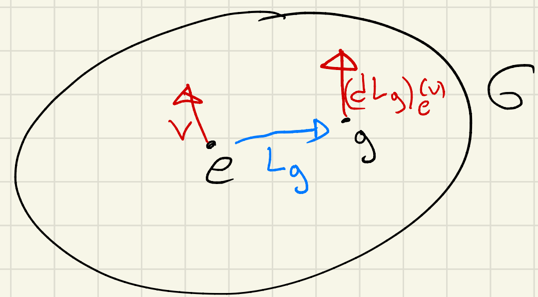
GRUPPO DISCRETO
= gruppo di Lie di dim = 0

ALGEBRA DI LIE $\mathfrak{g}$

G Lie $\qquad T_eG \ni v \dashrightarrow X$

$X(g) = (dL_g)_e(v) \quad \forall g \in G$

campo vettoriale



$X(e) = v \qquad$ Oss: X è INVARIANTE A SINISTRA

Def: $s \in \Gamma \mathcal{T}^k_h G$ è INVARIANTE A SINISTRA se $\forall g \in G$

$$dL_g(s) = s$$

L_g diffeo

$\varphi : M \to M$ diffeo

"$d\varphi$" $: \Gamma \mathcal{T}^k_h M \to \Gamma \mathcal{T}^k_h M$

$d\varphi_p : T_pM \xrightarrow{\sim} T_{\varphi(p)}M$

$\rightsquigarrow \quad \mathcal{T}^k_h T_pM \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}^k_h T_{\varphi(p)}M$

$$d\varphi(s)(\varphi(p)) = d\varphi_p(s(p))$$

dim oss: Teo: $\boxed{X(gh) = (dL_g)_h(X(h))}$

$\forall g,h \in G$

dim: $\boxed{X(gh)} = (dL_{gh})_e(v)$

$= d(L_g \circ L_h)_e(v)$

$= (dL_g)_h \circ (dL_h)_e(v)$

$= \boxed{(dL_g)_h X(h)}$

Prop: Abbiamo costruito una corr. biuniv.

$$T_eG \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{campi } X \text{ in } G \\ \text{invarianti a sx} \end{array} \right\} \subseteq \mathfrak{X}(G)$$

$$v \longmapsto X$$

$$X(e) \longleftarrow\!\shortmid X$$

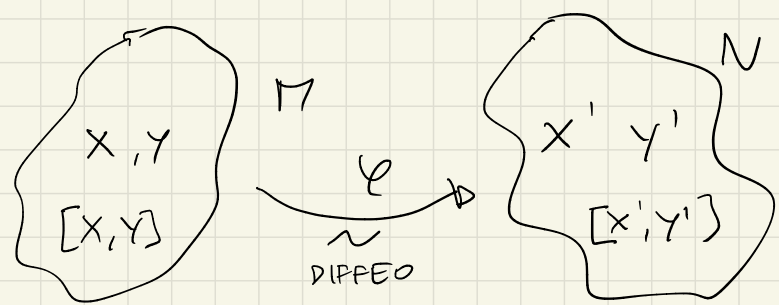
Prop: T_eG "$\subseteq$" $\mathfrak{X}(G)$ è sottoalgebra di Lie

dim: Devo mostrare che i campi invarianti a sx formano sottoalgebra

$X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ inv. a sx $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $[X,Y]$ inv. a sx.

$$\forall g \in G \quad \begin{aligned} dL_g(X) &= X \\ dL_g(Y) &= Y \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad dL_g[X,Y] = [X,Y]$$

OK perché $[\cdot,\cdot]$ commuta con diffeom.

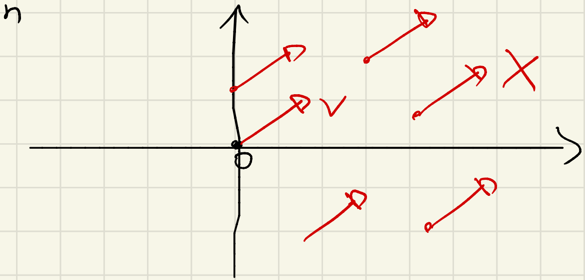


$\square$

G $\qquad \mathfrak{g} = T_eG \ni v, w.$ $\qquad$ Chi è $[v,w]$?

$$v \mapsto X, \quad w \mapsto Y \qquad [v,w] = [X,Y](e)$$

Esempi: $\mathbb{R}^n$



$[v,w]=0 \quad \forall v,w \in T_0\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^n$

COMMUTATIVA

(alg. Lie con $[v,w]=0 \ \forall v,w$)

anche in $S^1 \times \dots \times S^1$ l'algebra di Lie è commutativa.

$$T_e\, GL(n,\mathbb{R}) = \underset{A,B}{\overset{}{M(n)}} \ni A,B$$

$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$

Chi è $[A,B]$?

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{SL(2,\mathbb{R})} & = & \tilde{G} \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ SL(2,\mathbb{R}) & = & G \end{array}$$

$$\pi_1(SL(2,\mathbb{R})) \cong \pi_1(SO(2)) = \mathbb{Z}$$

$$SO(2) \cong S^1$$

$X,Y \in M(n) = T_e\, GL(n,\mathbb{R})$

Li estendo a $\mathfrak{X}(GL(n,\mathbb{R}))$ per moltiplicaz. a sinistra

$GL(n,\mathbb{R}) \subseteq M(n)$ $\qquad T_A\, GL(n,\mathbb{R}) = M(n) \quad \forall A \in GL(n,\mathbb{R})$

$$\underline{X(A)} = (dL_A)_I X(I)$$

$$= \underline{A \cdot X}$$

$L_A : M(n) \to M(n)$

$Z \mapsto AZ$

$(dL_A)_I = A$

$$Y(A) = A \cdot Y$$

Es: $[X,Y](A) = \underline{A \cdot (XY - YX)}$ (simile a esercizio dato)

$[X,Y](I) = XY - YX = [X,Y]$

Prop: $f : G \to H$ omom. $\leadsto f_* = df_e : T_e G \to T_e H$

$f_* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$

è omom. di algebre di Lie

Def: $f : M \to N$ liscia

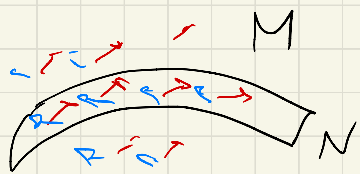
X Y campi $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ sono f-CORRELATI se $df_p(X(p)) = Y(f(p)) \quad \forall p \in M$

Ex: $f: M \to N$ liscia. Se $\underbrace{X_1, X_2}_{\text{in } M}$ sono f-correlati a $\underbrace{Y_1, Y_2}_{\text{in } N}$

allora $[X_1, X_2]$ è f-correlato a $[Y_1, Y_2]$

$\square$

Cor: $N \subseteq M$ $\qquad$ $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$



$[X, Y] \in \mathfrak{X}(N)$

Siano $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ che estendono X, Y

$[\bar{X}, \bar{Y}] \in \mathfrak{X}(M)$ $\qquad$ $[\bar{X}, \bar{Y}] = [X, Y]$ in N

Ex prec. con $i: N \hookrightarrow M$

Prop: $f: G \to H$ morfismo gr Lie $\rightsquigarrow$ $f_*: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ è morfismo di algebre di Lie

dim:

Tesi: $v, w \in T_eG = \mathfrak{g}$ $\qquad [v,w] = [X,Y](e)$

$v \to X$, $w \to Y$

$$f_*([v,w]) \stackrel{?}{=} [f_*(v), f_*(w)]$$

f morfismo $\Rightarrow$ $f(gh) = f(g)f(h)$

$\Rightarrow$ $f \circ L_g = L_{f(g)} \circ f$

$\Rightarrow$ $\boxed{X \text{ e } f_* X \text{ sono } f\text{-correlati}}$

$v \qquad df_e(v)$

Y e $f_* Y$ son f-corr.

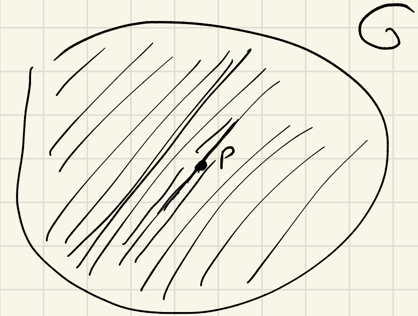
$\Rightarrow$ $[X,Y]$ e $[f_* X, f_* Y]$ sono f-correlati

$\Rightarrow$ $f([v,w]) = [f_* v, f_* w]$ $\qquad \square$

Cor: $H < G$ sgr di Lie $\quad T_eH < T_eG \longleftarrow \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ sottoalgebra

$$\begin{array}{ccc} T_eH & < & T_eG \\ \parallel & & \parallel \\ \mathfrak{h} & \subseteq & \mathfrak{g} \end{array}$$

$i : H \hookrightarrow G$ omom. iniett. imm.



$i_* : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ iniettiva

$T_eH \to T_eG$ identifico $\mathfrak{h}$ con $i_*(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{g}$

i_* è morfismo di algebre

Probl: Classificare sgr di Lie di $SO(3)$

$$\begin{array}{c} H < SO(3) \\ \downarrow \\ \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{so}(3) \cong (\mathbb{R}^3, \times) \end{array}$$

prod. vettoriale

$[v,w] = v \times w$